RIVISTA BIBLIOGRAFICA

SULLO SVILUPPO DELLE FUNZIONI JACOBIANE SECONDO LE POTENZE ASCENDENTI DELL' ARGOMENTO.

WEIERSTRASS. Theorie der Abel' schen Functionen. Giornale di Crelle. Tom. 52. pag. 356.
JACOBI. Darstellung der elliptischen etc. idem Tom. 54. pag. 82.

Indicando, come d'ordinario, con $\mathrm{sn}u$, $\mathrm{cn}u$, $\mathrm{dn}u$ le tre funzioni ellittiche, con k il modulo per le medesime, con k' il suo complemento, si ha, come è noto, la formola (*) :

$$k'^2 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}k} = k \int_0^u \mathrm{cn}^2 u \, \mathrm{d}u - k \frac{\mathrm{sn}u.\mathrm{cn}u}{\mathrm{dn}u} .$$

Per essa ottiensi facilmente :

$$k'^2 \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{d}k} = k \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{cn}^2 u}{\mathrm{d}u} \int_0^u \mathrm{cn}^2 u.\mathrm{d}u + 2k\,\mathrm{sn}^2 u.\mathrm{cn}^2 u$$

quindi ponendo :

$$\int_0^u \mathrm{d}u \int_0^u \mathrm{d}u\,\mathrm{sn}^2 u = \varphi(u)$$

si ha :

$$k'^2 \frac{\mathrm{d}\varphi(u)}{\mathrm{d}k} = 2k \int_0^u \mathrm{d}u \int_0^u \mathrm{d}u\,\mathrm{sn}^2 u.\mathrm{cn}^2 u + k \int_0^u \mathrm{d}u \int_0^u \mathrm{d}u \left\{ \frac{\mathrm{d}\mathrm{cn}^2 u}{\mathrm{d}u} \int_0^u \mathrm{cn}^2 u.\mathrm{d}u \right\}$$

ossia :

$$k'^2 \frac{\mathrm{d}\varphi(u)}{\mathrm{d}k} = k \left\{ \int_0^u \mathrm{d}u \int_0^u \mathrm{d}u (2\mathrm{sn}^2 u.\mathrm{cn}^2 u - \mathrm{cn}^4 u) + \frac{1}{2} \left(\int_0^u \mathrm{cn}^2 u.\mathrm{d}u \right)^2 \right\} .$$

Ma

$$2k^2 \int_0^u \mathrm{d}u \int_0^u \mathrm{d}u (2\mathrm{sn}^2 u.\mathrm{cn}^2 u - \mathrm{cn}^4 u) = 2k'^2 \left(\frac{1}{2} u^2 - 2\varphi(u) \right) - \mathrm{sn}^2 u$$

(*) Gudermann. Theorie der Modular-Functionen. Giornale di Crelle. Tom. 18. pag. 350.

dunque :

$$2kk'^2 \frac{d\varphi(u)}{dk} = k'^2u^2 - 4k'^2\varphi(u) - \mathrm{sn}^2u + k^2\left(\int_0^u \mathrm{cn}^2u\, du\right)^2$$

od essendo $\mathrm{cn}^2u = 1 - \mathrm{sn}^2u$, si avrà :

$$(1) \qquad \frac{d^2\varphi(u)}{du^2} - k^2\left(\frac{d\varphi(u)}{du}\right)^2 + 2k^2u\frac{d\varphi(u)}{du} + 4k'^2\varphi(u) - u^2 + 2kk'^2\frac{d\varphi(u)}{dk} = 0.$$

Jacobi alla pag. 145 dei *Fundamenta Nova* definisce $\Theta(u)$ per mezzo dell'equazione:

$$\Theta(u) = \sqrt{\frac{2Kk'}{\pi}}\, e^{\frac{1}{2}u^2\left(1 - \frac{E}{K}\right) - k^2\varphi(u)}$$

essendo K, E le funzioni complete di prima e seconda specie.

Ora ponendo :

$$\Phi(u) = e^{-k^2\varphi(u)}$$

si ha :

$$\log.\Phi(u) = -k^2\varphi(u)$$

e l'equazione (1) darà :

$$\frac{d^2\log.\Phi}{du^2} + \left(\frac{d\log.\Phi}{du}\right)^2 + 2k^2u\frac{d\log.\Phi}{du} + k^2u^2 + 2kk'^2\frac{d\log\Phi}{dk} = 0$$

oppure :

$$(2) \qquad \frac{d^2\Phi}{du^2} + 2k^2u\frac{d\Phi}{du} + k^2u^2\Phi + 2kk'^2\frac{d\Phi}{dk} = 0.$$

Ora supponendo la funzione $\Phi(u)$ sviluppabile secondo le potenze ascendenti dell'argomento, si avrà evidentemente :

$$\Phi(u) = 1 + A_1u^2 + A_2u^4 + A_2u^6 + A_3u^8 + \ldots.$$

e dalla equazione (2) si otterranno le :

$$A_1 = 0\ , \qquad 3.4.A_2 + k^2 = 0\ , \qquad 5.6.A_3 + 2.4k^2A_2 + 2k\,k'^2\frac{dA_2}{dk} = 0\ \ldots$$

$$2r(2r-1)A_r + 4(r-1)k^2A_{r-1} + k^2A_{r-2} + 2k\,k'^2\frac{dA_{r-1}}{dk} = 0.$$

col mezzo delle quali si hanno i valori dei coefficienti A_2, A_3 . . . .

Questi coefficienti coincidono con quelli che Jacobi indica con r_i'' nella memoria citata, e la funzione $\Phi(u)$ non è che la $Al(u)$ del Sig. Weierstrass.

Pavia. Dicembre 1857.

F. Brioschi